

BIBL. NAZIONALE  
CENTRALE-FIRENZE

953  
30





953 A I  
30

# SUL CALCOLO APPROSSIMATO

DEGLI

## INTEGRALI D' ORDINE SUPERIORE

NOTA

DEL PROF. GIUSTO BELLAVITIS

MEMBRO EFFETTIVO PENSIONATO DELL' I. R. ISTITUTO VENEZO  
DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI

*(Estr. dal Volume VI delle Memorie dell' Istituto stesso)*



VENEZIA

PRESSO LA SEGRETERIA DELL' ISTITUTO

NEL PALAZZO DUCALE

1856.

NEL PRIV. STAB. NAZ. DI G. ANTONELLI



# SUL CALCOLO APPROSSIMATO

DEGLI

## INTEGRALI D' ORDINE SUPERIORE

Le applicazioni delle matematiche richiegono bene spesso che si calcolino numericamente alcuni valori, i quali non si possono ridurre a funzioni già conosciute; sarebbe laborioso ed imbarazzante il formar tavole, che unite a quelle utilissime dei logaritmi e delle funzioni circolari, ed alle altre, di minor uso, delle trascendenti ellittiche, del fattoriale  $[1]^x$ , e degl' integrali  $\int e^{-x^2} dx$ ,  $\int \frac{dx}{\log x}$ , ec., dessero modo di calcolare parecchie altre funzioni. Siccome molte volte le funzioni incognite dipendono dall' integrazione, così tornano opportuni i metodi per calcolare numericamente gl' integrali dei varii ordini. In questa nota espongo le formule che a tal uopo mi sembrano di più generale e comodo uso.

1.° Dati alquanti valori  $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)$  che io suppongo corrispondere ad intervalli eguali della variabile indipendente  $(x)$ , si vogliono determinare gl' integrali primo, secondo, terzo, ec., della funzione  $(y)$ , cui quei valori appartengono. Si scrivano le differenze prime dei dati valori  $(y_0, y_1, \dots)$ , ed accanto ad esse le differenze seconde, poi le terze, ec.: questi calcoli facilissimi giovano eziandio a scoprire qualche errore che fosse occorso nella determinazione dei dati valori. Per avere l' integrale primo, piuttostochè moltiplicare quei valori  $(y_0, y_1, \dots)$  per appositi coefficienti (i quali cangerebbero col numero di essi valori), giova meglio prendere in ciascun ordine di differenze le somme, o le differenze, alternativamente, delle due differenze estreme, e quelle somme, o differenze, moltiplicarle poi per coefficienti costanti: così il valore dell' integrale viene

$$\frac{1}{2} \rightarrow$$

3.° Ecco il prospetto dei valori della funzione  $y$ , e delle sue differenze e sommatorie: colla caratteristica  $V$  indico i valori variati corrispondenti ad  $x=1, 2, \dots n$ .

[illegible]
$$\Delta = V - V^0, \quad \Sigma = \frac{1}{\Delta}, \quad \Delta = e^d - 1, \quad d = \log(1 + \Delta), \quad \int = \frac{1}{d} = \frac{1}{\log(1 + \Delta)}.$$

Con  $V^0$ , così pure con  $\Delta^0$  oppure  $d^0$  viene espressa la funzione primitiva.

5.° Cominciando dall' integrale primo, abbiamo:

$$(1) \quad \Delta \int = \frac{\Delta}{\log (1+\Delta)} = \Delta^0 + \frac{1}{2} \Delta - \frac{1}{12} \Delta^3 + \frac{1}{24} \Delta^5 - \text{ec.}$$

Questo  $\Delta \int$  è l' integrale esteso da  $x=0$  ad  $x=1$ ; per avere quello esteso da  $x=0$  ad  $x=n$ , che segneremo con  $\int_n$ , bisogna moltiplicare  $\Delta \int$  per  $1+V+V^2+\dots+V^{n-1} = \frac{V^n-1}{V-1} = \frac{V^n-1}{\Delta}$ ; perciò

$$(2) \quad \int_n = \frac{V^n-1}{\log (1+\Delta)} = (V^n-1) \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{2} (V^n-V^0) - \frac{1}{12} (V^n-1) \Delta + \frac{1}{24} (V^n-1) \Delta^3 - \text{ec.}$$

Questa formola non è al nostro caso, perchè contiene le  $V^n \Delta$ ,  $V^n \Delta^3$ , ec. che non sono comprese nel precedente (§ 3) prospetto: noi possiamo eliminarle osservando che  $V^n \Delta = V^{n-1} \Delta + V^{n-2} \Delta^2 + V^{n-3} \Delta^3 + \text{ec.}$ , ed in generale  $V^i = \frac{1}{(1-\Delta V^{-i})^i}$ . Ma possiamo fare immediatamente la sostituzione nella formola simbolica (2) separandola in due parti  $\frac{V^n}{\log (1+\Delta)}$ ,  $\frac{-1}{\log (1+\Delta)}$  e nella prima parte ponendo  $-\log \left(1 - \frac{\Delta}{1+\Delta}\right) = -\log (1 - V^{-1} \Delta)$  in luogo di  $\log (1+\Delta)$ ; così si ha

$$(3) \quad \frac{1}{\alpha} \int_n = \frac{-V^n}{\log (1-V^{-1} \Delta)} - \frac{1}{\log (1+\Delta)} = (V^{n+1}-1) \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{2} (V^n+V^0) - \frac{1}{12} (V^{n-1}-1) \Delta - \frac{1}{24} (V^{n-2}+1) \Delta^2 - \frac{19}{720} (V^{n-1}-1) \Delta^3 - \frac{5}{1440} (V^{n-4}+1) \Delta^4 - 0,0142692 (V^{n-5}-1) \Delta^5 - 0,0113674 (V^{n-6}+1) \Delta^6 - \text{ec.}$$

Al primo membro abbiamo dato il coefficiente  $\frac{1}{\alpha}$  pel caso che i valori  $y, Vy, \dots, V^ny$  corrispondessero ad  $x=0, \alpha, 2\alpha, \dots, n\alpha$ , anzichè ad  $x=0, 1, \dots, n$ . Il primo termine dell' ultimo membro è

$$\frac{V^{n+1}-1}{V-1} = V^0 + V + \dots + V^n.$$



6.° L' uso di questa (3) si renderà palese col seguente esempio numerico, nel quale  $y = \frac{1}{x+1}$ ,  $\alpha = \frac{1}{5}$ ,  $n = 5$ ; sicchè vuol determinarsi  $\int \frac{dx}{x+1}$  da  $x=0$  ad  $x=1$ , vale a dire il log 2. Ridotte in decimali le frazioni  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{5}{7}$ ,  $\frac{5}{8}$ ,  $\frac{5}{9}$ ,  $\frac{5}{10}$  se ne scriveranno come segue tutte le differenze:

$\Sigma'$	$\Sigma$	$y$	$\Delta$	$\Delta'$	$\Delta''$	$\Delta'''$	$\Delta^{iv}$
0.4005925	0.4855987	1,0000000	— 4666667	476491	— 478372	79566	— 59685
4,7171245	4,5107320	0,8535353	— 4490476	297619	— 99206	59681	
5,7481422	2,0510177	0,7142857	— 892857	498415	— 59525		
6,4041599	2,6560477	0,625	— 694444	458888			
	5,2115735	0,5555556	— 555556				
		0,5					
6,8045324	2,7281746	4,5	444444	645079	449047	449047	00000
6,0057674	5,6949720	— 0,5		— 557505	— 258097	— 59685	— 79570

Dopo ciò si formano le somme 1,5 , 0,0615079 , 0,0119047 dei termini primo ed ultimo delle colonne  $y$ ,  $\Delta'$ ,  $\Delta''$ ; e nelle colonne intermedie dei  $\Delta$ ,  $\Delta'$ ,  $\Delta''$  sottraendo il primo numero dall' ultimo si ottengono le differenze 0,444444, 0,0119047. Questi numeri moltiplicati pei coefficienti della formula (3) ed uniti colla somma 4,2281746 dei cinque valori di  $y$  danno 3,46... che moltiplicato per  $\alpha = 0,2$  offre il valore di log 2 = 0,6931472 con un errore di + 0,0000158, che è minore di quanto avrebbesi sperato osservando la grandezza degli ultimi termini della serie.

4,2281746  
— 0,75  
— 0092593  
— 25628  
— 3142  
— 2232  

---

3,4658151  

---

0,6931630

7.° Veniamo all' integrale secondo. Collo stesso ragionamento che ci servi pel primo troveremo:

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \frac{1}{x^2} \int_n^0 \int &= \frac{V^n - 1}{(\log(1 + \Delta))^2} = \frac{V^n}{(\log(1 - V^{n-1}\Delta))^2} - \frac{1}{(\log(1 + \Delta))^2} \\
 &= (V^{n+1} - 1) \frac{1}{\Delta^2} - (V^{n+1} + 1) \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{12} (V^n - V^n) \\
 &\quad - \frac{1}{240} (V^{n-1} - 1) \Delta^3 - \frac{1}{240} (V^{n-1} + 1) \Delta^5 - 0,0036544 (V^{n-1} - 1) \Delta^4 \\
 &\quad - 0,0034415 (V^{n-1} + 1) \Delta^5 - 0,0027086 (V^{n-1} - 1) \Delta^6 - \text{ec.}
 \end{aligned}$$

I due primi termini dell'ultimo membro sono:

$$\frac{V^{n+1} - 1}{V - 1} \Sigma - V^{n+1} \Sigma - \Sigma = (V + V^2 + \dots + V^n) \Sigma.$$

8.° Ci resta da determinare  $V\Sigma$  (dal quale dipendono i successivi  $V^2\Sigma$ ,  $V^3\Sigma$ , ec.) in guisa che il differenziale dell'integrale secondo  $\int\int$  svanisca esso pure colla  $x$ . Serve a tal uopo la formula

$$(5) \quad V\Sigma = \frac{1}{x^4 - 1} - \frac{1}{d} + d^0 = \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\log(1 + \Delta)} + \Delta^0.$$

Se si conoscano i valori delle derivate  $dy$ ,  $d'y$ , ec. corrispondenti ad  $x=0$ , si adopererà la

$$\begin{aligned}
 (6) \quad V\Sigma &= \frac{1}{2} d^0 + \frac{1}{12} ad - \frac{1}{6 \cdot 120} a^2 d^2 + \frac{1}{120 \cdot 232} a^3 d^3 \\
 &\quad - \frac{1}{3040 \cdot 240} a^4 d^4 + \text{ec.}
 \end{aligned}$$

Altrimenti si sostituiranno i già calcolati valori di  $y$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta^2 y$ , ec. nell'altro sviluppo della (5)

$$(7) \quad V\Sigma = \frac{1}{2} \Delta^0 + \frac{1}{12} \Delta - \frac{1}{24} \Delta^2 + \frac{19}{720} \Delta^3 - \frac{3}{160} \Delta^4 + \text{ec.}$$

i cui coefficienti numerici sono quelli stessi della (3).

9.° Applichiamo queste formule al precedente esempio, e cerchiamo

$\int\int \frac{dx^2}{x+1}$ . Nel presente caso per $x=0$ si	+ 0,5000000
ha $y=1$ , $dy=-1$ , $d'y=2$ , $d^2y=-6$ ,	- 0,0166667
$d^3y=24$ , ec.; sostituendo nella (6) si trova	+ 667
$V\Sigma=0,4833987$ , che è il valore adoperato	- 13
nel calcolo scritto superiormente. La serie sem-	<u><u><math>V\Sigma=0,4833987</math></u></u>

bra convergentissima, ma in fatti è soltanto semiconvergente, cioè ha i termini coi segni alternativi, che in sulle prime vanno rapidamente diminuendo per poscia crescere infinitamente. La serie (7) ci avrebbe dato invece  $V\Sigma = 0,4834504$  valore meno approssimato.

$$\begin{array}{r} 0,5000000 \\ - 0,0138889 \\ - 19841 \\ - 4712 \\ - 1488 \\ - 566 \\ \hline V\Sigma = 0,4834504 \end{array}$$

10.° Per continuare il calcolo dell'integrale secondo, dopo aver calcolata la colonna delle  $\Sigma$  alla loro somma 9,6987394, uniremo, come lu indica la (4), le differenze  $-0,5$ ,  $-0,0337303$ ,  $-0,0039685$  e le somme  $-0,0238097$ ,  $-0,0079370$  dei numeri estremi di ciascuna colonna moltiplicate rispettivamente per  $\frac{1}{12}$ ,  $-\frac{1}{240}$ , ec. La somma moltiplicata per  $\alpha^3$  dà il valore di  $\int_1^0 \int_0^1 \frac{1}{x+1}$   
 $= 2 \log 2 - 1 = 0,3862944$  con leggerissimo errore.

$$\begin{array}{r} 9,6987394 \\ - 0,0416667 \\ \hline 9,6570727 \\ + 1405 \\ + 992 \\ + 145 \\ + 249 \\ \hline 9,6573518 \\ \hline 0,3862941 \end{array}$$

11.° Anche per l'integrale terzo opereremo nello stesso modo ed avremo:

$$\begin{aligned} \int_n^0 \int_0^1 \int_1^0 &= \frac{V^n - 1}{(\log(1 + \Delta))^3} = \frac{-V^n}{(\log(1 - V^{-1}\Delta))^3} - \frac{1}{(\log(1 + \Delta))^3} \\ &= (V^{n+1} - 1) \frac{1}{\Delta^3} - \frac{5}{2} (V^{n+1} + 1) \frac{1}{\Delta^2} + \frac{1}{2} (V^{n+1} - 1) \frac{1}{\Delta} \\ &\quad + \frac{1}{240} (V^{n+1} - 1) \Delta + \frac{1}{480} (V^{n+1} + 1) \Delta^2 + \text{ec.} \end{aligned}$$

I tre primi termini si riducono, mediante la  $V = 1 + \Delta$ , ad altra furma più opportuna ai nostri calcoli. Troveremo tal furma sviluppando i primi termini di  $\frac{V^n}{(\log(1 + \Delta))^3} + \frac{1}{(\log(1 - V^{-1}\Delta))^3}$ , i quali sono

$$(V^n - V^3) \Sigma^3 + \frac{5}{2} (V^n + V^3) \Sigma^2 + \frac{1}{2} (V^n - V) \Sigma;$$

e siccome  $(V^n - V^3) \Sigma^3 = (V^3 + V^4 \dots + V^{n-1}) \Sigma^3$ ; così finalmente

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \frac{1}{x^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} &= (V^1 + V^2 + V^3 + \dots + V^n) \Sigma^1 + \frac{1}{2} (V^n + V^1) \Sigma^2 \\
 &+ \frac{1}{2} (V^n - V) \Sigma + \frac{1}{240} (V^{n-1} - 1) \Delta + \frac{1}{480} (V^{n-1} + 1) \Delta^2 \\
 &+ \frac{1}{945} (V^{n-1} - 1) \Delta^3 + 0,0005456 (V^{n-1} + 1) \Delta^4 \\
 &+ 0,0002720 (V^{n-1} - 1) \Delta^5 + \text{ec.}
 \end{aligned}$$

12.° Perchè l'integrale terzo e i suoi differenziali primo e secondo svaniscano quando  $x=0$  bisogna che la  $V\Sigma$  si sia determinata come al § 8; e che inoltre la  $V^1\Sigma^1$  si determini colle  $V^1\Sigma^1 = \frac{1}{(e^{-1}-1)^2} - \frac{1}{d^2} - \frac{1}{d}$

$$= \frac{e^{-1}}{(e^{-1}-1)^2} - \frac{1}{d^2} - \frac{1}{d} = \frac{1+2\Delta+\Delta^2}{\Delta^2} - \frac{1}{(\log(1+\Delta))^2} - \frac{1}{\log(1+\Delta)},$$

che si sviluppa nella

$$(9) \quad V^1\Sigma^1 = \frac{5}{12} d^3 + \frac{\Delta d}{12} + \frac{\Delta^2 d^2}{240} - \frac{\Delta^3 d^3}{720} - \frac{\Delta^4 d^4}{6048} + \frac{\Delta^5 d^5}{50240} + \text{ec.}$$

oppure nella

$$\begin{aligned}
 (10) \quad V^1\Sigma^1 &= \frac{5}{12} \Delta^0 + \frac{\Delta}{12} - \frac{5}{80} \Delta^2 + \frac{1}{45} \Delta^3 - \frac{913}{60480} \Delta^4 \\
 &+ 0,0111276 \Delta^5 - 0,0086588 \Delta^6 + \text{ec.}
 \end{aligned}$$

13.° Nel nostro solito esempio troveremo mediante la (9)

$V^1\Sigma^1 = 0,4003925$ , e mediante la (10)  $V^1\Sigma^1 = 0,4004313$ ; il primo valore come più esatto fu adoperato a formare la colonna  $\Sigma^1$  del calcolo del § 6. Poscia per ottenere l'integrale terzo  $(V^1 + V^2 + \dots + V^n) \Sigma^1 = 12,2698191$  si formarono la somma  $(V^n + V^1) \Sigma^1$  + 3,4022762  
 $= 6,8045524$  e la differenza + 1,3640873  
 $(V^n - V) \Sigma = 2,7281746$ , questi + 4630  
e gli altri numeri già calcolati (§ 6) + 1281  
per formare l'integrale primo, sostituiti nella (8) danno + 126  
 $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{x+1}$  + 65  
 $= 0,13629434$ , che è inferiore al 17,0367928  
giusto di appena 2 delle ottave 0,13629434  
decimali.

14.° Per stabilire la legge con cui procedono le serie relative agl'integrali d'ordine superiore, trovo opportuno presentare qui di seguito una tavola di

coefficienti numerici che ho già pubblicato negli *Annali delle scienze del regno lombardo-veneto* 1.<sup>o</sup> bimestre 1834, e che in molte circostanze riesce vantaggioso avere sott'occhio.

TAVOLA DEI COEFFICIENTI  $(n)_r$ .

I valori di  $n$  sono scritti nella prima colonna, e quelli di  $r$  (sempre positivi) nella prima riga.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
— 4	40	65	350	4704	7770	34405	445750	644504	2532530	
— 3	6	25	90	304	966	3025	9330	28504	86526	264695
— 2	3	7	45	34	63	427	255	544	4023	2047
— 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{-1}{120}$	0	$\frac{1}{252}$	0	$\frac{-1}{240}$	0	$\frac{1}{432}$
1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{-1}{120}$	0	$\frac{1}{252}$	0	$\frac{-1}{240}$	0	$\frac{1}{432}$
2	1	$\frac{-5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{-1}{120}$	$\frac{-1}{120}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{-1}{240}$	$\frac{-1}{240}$	$\frac{1}{432}$
3	3	2	$\frac{-3}{4}$	$\frac{19}{120}$	$\frac{-1}{40}$	$\frac{-4}{315}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{19}{5040}$	$\frac{-1}{80}$	$\frac{-1}{1520}$
4	6	44	6	$\frac{-251}{120}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{-221}{2520}$	$\frac{-11}{420}$	$\frac{199}{5040}$	$\frac{-1}{840}$	$\frac{-104}{2640}$
5	40	35	50	24	$\frac{-95}{12}$	$\frac{853}{804}$	$\frac{-95}{252}$	$\frac{-47}{720}$	$\frac{79}{804}$	$\frac{-53}{1232}$
6	45	85	225	274	420	$\frac{-19087}{504}$	$\frac{4375}{168}$	$\frac{-9829}{5040}$	$\frac{-19}{442}$	$\frac{8915}{44088}$
7	21	475	735	4624	4704	720	$\frac{-5287}{24}$	$\frac{35953}{720}$	$\frac{-2849}{240}$	$\frac{-439}{1584}$
8	28	322	4960	6760	48132	43068	5040	$\frac{-1070017}{720}$	$\frac{57281}{450}$	$\frac{-350157}{3960}$

15.° I numeri che nella tavola stanno fuori delle righe più grosse, e che sono tutti interi, sono i coefficienti degli sviluppi dei fattoriali in potenze e di queste in quelli. Così

$$\begin{aligned} [a]^1 &= a(a+1)(a+2)(a+3) = a^4 + (4)_1 a^3 + (4)_2 a^2 + (4)_3 a, \\ [a]^{-1} &= \frac{1}{(a-1)(a-2)(a-3)} = a^{-3} + (-3)_1 a^{-2} + (-3)_2 a^{-1} + (-3)_3, \\ a^1 &= [a]^1 - (-3)_1 [a]^0 + (-2)_1 [a]^1 - (-1)_1 a, \\ a^{-1} &= [a]^{-1} - (-5)_1 [a]^{-2} + (-6)_1 [a]^{-3} - (-7)_1 [a]^{-4} + \text{ec.} \end{aligned}$$

16.° Le espressioni generali dei numeri  $(n)_r$  sono di forma piuttosto complicata:

$$\begin{aligned} (n)_1 &= \frac{(-n)(1-n)}{2}, \quad (n)_2 = \frac{(1-5n)(-n)(1-n)(2-n)}{24}, \\ (n)_3 &= \frac{(-n)^3(1-n)^2(2-n)(3-n)}{48}, \quad \text{ecc.} \end{aligned}$$

Essi tutti si annullano quando  $r+1 > n > -1$ : togliendo dalle predette espressioni quel fattore che le fa annullare, si hanno altri numeri frazionarii, che io segno con  $\frac{1}{0}(n)_r$ , e che sono quelli posti nella tavola tra le righe gros-

$$\begin{aligned} \text{se; così } \frac{1}{0}(0)_1 &= \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{0}(0)_2 = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2}{24}, \quad \frac{1}{0}(0)_3 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{48}, \quad \text{ec.}, \quad \frac{1}{0}(1)_1 = -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{0}(1)_2 &= -\frac{2 \cdot -1 \cdot 1}{24}, \quad \frac{1}{0}(1)_3 = \frac{1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2}{48}, \quad \text{ec.}, \quad \frac{1}{0}(2)_1 = -\frac{5 \cdot -2 \cdot -1}{24}, \\ \frac{1}{0}(2)_2 &= \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{48}, \quad \frac{1}{0}(3)_1 = \frac{9 \cdot 4 \cdot -1}{48}, \quad \text{ec. ec.} \end{aligned}$$

17.° I coefficienti della tavola si calcolano mediante la relazione  $(n+1)_r = (n)_r + n(n)_{r-1}$ , essendo inoltre

$$(n)_0 = 1, \quad (-1)_r = 1, \quad (r+1)_r = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r.$$

Pei coefficienti frazionarii serve la stessa relazione, purchè si determinino quelli della prima riga mediante le formule, che danno i numeri Bernulliani, giacchè  $\frac{1}{0}(0)_1 = \frac{1}{2} B_1$ ,  $\frac{1}{0}(0)_2 = -\frac{1}{4} B_2$ ,  $\frac{1}{0}(0)_3 = \frac{1}{6} B_3$ , ec. Per sapere come procedano questi  $\frac{1}{0}(0)_r$  giova aver presente la formula

$$\mp \frac{1}{0}(0)_r = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2r-1)}{(2\pi)^{2r}} \left( 1 + \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} + \frac{1}{4^{2r}} + \text{ec.} \right)$$

18.° Ora coi coefficienti  $(n)_r$  e coi fattoriali dell' unità 1. 2. 6, 24, 120, ec. si ha

$$(11) \quad \left( \frac{\Delta}{\log(1+\Delta)} \right)^{r+1} = 1 + \frac{(-r)_1}{r} \Delta + \frac{(1-r)_2}{(r-1)r} \Delta^2 \dots \\ + \frac{(0)_{r+1}}{0.1.2.\dots r} \Delta^{r+1} - \frac{(1)_{r+2}}{1.0.1.2.\dots r} \Delta^{r+2} + \frac{(1)_{r+3}}{2.0.1.2.\dots r} \Delta^{r+3} \\ - \frac{(5)_{r+4}}{6.0.1.2.\dots r} \Delta^{r+4} + \text{ec.}$$

$$(12) \quad \left( \frac{d}{e^d-1} \right)^r = 1 + \frac{(r)_1}{1-r} d + \frac{(r)_2}{(1-r)(2-r)} d^2 \dots \\ + \frac{(r)_r}{(1-r)(2-r)\dots(-1)0} d^r + \frac{(r)_{r+1}}{(1-r)(2-r)\dots(-1)0.1} d^{r+1} \\ + \frac{(r)_{r+2}}{(1-r)\dots(-1)0.1.2} d^{r+2} + \text{ec.}$$

19.° Risulta dalla (11) e dalle considerazioni fatte ai § 5. 7. 11 che

$$\int^{r+1} = (V^n - V^{r+1}) \Sigma^{r+1} + \frac{(-r)_1}{r} (V^n + V^r) \Sigma^r \\ + \frac{(1-r)_2}{(r-1)r} (V^n - V^{r-1}) \Sigma^{r-1} + \text{ec.}$$

e siccome  $(V^n - V^{r+1}) \Sigma^{r+1} = (V^{r+1} + V^{r+2} \dots + V^{n-1}) \Sigma^r$ ; così avremo la formula, che comprende come casi particolari le (3) (4) (5).

$$(13) \quad \frac{1}{x^{r+1}} \int_n^0 \int^r = (V^r + V^{r+1} \dots + V^n) \Sigma^r \\ + \frac{(-r)_1-r}{r} (V^n + V^r) \Sigma^r + \frac{(1-r)_2}{(1-r)r} (V^n - V^{r-1}) \Sigma^{r-1} \\ + \frac{(2-r)_3}{(r-2)(r-1)r} (V^n + V^{r-2}) \Sigma^{r-2} + \dots \\ \dots + \frac{(-1)_r}{1.2.\dots r} (V^n \mp V) \Sigma \mp \frac{(0)_{r+1}}{0.1.2.\dots r} (V^n \pm V^0) \\ \mp (V^{n-1} \mp V^1) \Delta \mp \frac{(2)_{r+2}}{2.0.1.2.\dots r} (V^{n-2} \pm 1) \Delta^2 \\ \mp \frac{(5)_{r+4}}{6.0.1.2.\dots r} (V^{n-3} \mp 1) \Delta^3 \mp \text{ec.}$$

i segni superiori valendo per  $r$  pari e gli inferiori per  $r$  dispari. Ciascun

delle  $V_\Sigma, V^1\Sigma^1, \dots$  dev'essere determinata mediante la formula, che comprende come casi particolari le (6) (9),

$$(14) \quad V^r \Sigma^r = \frac{1}{0.4.2 \dots (r-1)} \left\{ - (r)_r d^0 + \frac{1}{4} (r)_{r+1} \alpha d \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (r)_{r+1} \alpha^2 d^2 + \frac{1}{6} (r)_{r+1} \alpha d^r - \text{ec.} \right\};$$

che se non si conoscano i differenziali, si ridurrà questa formula a contenere invece le differenze, osservando che  $\alpha d = \log(1 + \Delta)$ , e si avranno le formule (7) (10) e la generale

$$(15) \quad V^r \Sigma^r = \frac{1}{0.4.2 \dots (r-1)} \left\{ - (r)_r \Delta^0 + \frac{1}{4} (r)_{r+1} \Delta \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left( (r)_{r+1}(2)_1 + (r)_{r+1} \right) \Delta^2 + \frac{1}{6} \left( (r)_{r+1}(3)_1 + (r)_{r+1}(3)_2 + (r)_{r+1} \right) \Delta^3 \right. \\ \left. - \frac{1}{24} \left( (r)_{r+1}(4)_1 + (r)_{r+1}(4)_2 + (r)_{r+1}(4)_3 + (r)_{r+1} \right) \Delta^4 + \text{ec.} \right\}.$$

20.° Nell'esempio del § 6 trovasi mediante le (14),

$V^1\Sigma^1 = 0,3597074$ ,  $V^2\Sigma^2 = 0,3342202$ ,  $V^3\Sigma^3 = 0,3162325$ ; e col loro mezzo calcolai l'integrale quarto  $= 0,03530735$ , il quinto  $= 0,007237008$ , ed il sesto  $= 0,0012281368$ , i cui errori giungono appena a due unità delle ultime decimali.

21.° Potrebbero cercarsi altre formule, che dessero gli integrali tra  $x=0$  ed  $x=n$  conoscendo i valori di  $y$  corrispondenti ad  $x = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{5}{2}$ ,  $\dots \dots \dots \left(n - \frac{1}{2}\right)$ : gioverebbe pure determinare direttamente le differenze degli integrali quando  $x$  riceve un dato accrescimento. D'altronde, se si supponessero conosciuti non solamente i valori delle derivate corrispondenti ad  $x=0$ , ma eziandio quelli corrispondenti ad  $x=n$ , si potrebbe fare a meno di calcolare (§ 4) le differenze, ed adoperare le formule

$$\frac{1}{\alpha} \int_n^0 = \frac{1}{2} V^0 + V^1 + V^2 \dots + V^{n-1} + \frac{1}{2} V^n \\ + (V^n - 1) \left( \frac{\alpha d}{12} - \frac{\alpha^2 d^2}{6.120} + \frac{\alpha^3 d^3}{120.252} - \frac{\alpha^4 d^4}{5040.240} + \text{ec.} \right),$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^2} \int_n^0 \int^0 &= (V + V^1 \dots + V^n) \Sigma + \frac{1}{42} (V^n - V^0) \\ &+ (V^n - 1) \left( \frac{\alpha^1 d^1}{2.420} - \frac{\alpha^2 d^2}{24.252} + \frac{\alpha^3 d^3}{720.240} - \text{ec.} \right), \\ \frac{1}{\alpha^3} \int_n^0 \int^0 \int^0 &= (V^1 + V^2 \dots + V^n) \Sigma^1 + \frac{1}{2} (V^n + V^1) \Sigma^1 + \frac{1}{2} (V^n - V^1) \Sigma \\ &+ (V^n - 1) \left\{ \frac{\alpha d}{240} - \frac{\alpha^2 d^2}{6.504} + \frac{\alpha^3 d^3}{420.480} - \frac{\alpha^4 d^4}{5040.264} + \text{ec.} \right\}. \end{aligned}$$

Ma pel calcolo di un integrale isolato mi sembrano di un uso più generale le formule date precedentemente, le quali non richieggono alcuna conoscenza intorno alla funzione, di cui sono dati gli  $n+1$  valori  $y_0, \dots, y_n$ . Applicando quelle formule al caso di  $y = e^x$ , posto  $\alpha = \frac{1}{5}$ ,  $n = 5$ , e calcolando con sei decimali ottenni gl' integrali da  $x = 0$  ad  $x = 1$  primo, secondo, terzo, quarto, quinto e sesto rispettivamente esatti fino alle decimali 6.<sup>a</sup>, 6.<sup>a</sup>, 6.<sup>a</sup>, 7.<sup>a</sup>, 8.<sup>a</sup>, 9.<sup>a</sup>.

*Aggiunta alla suddetta Memoria.*

Nel Giornale astronomico intitolato *Berliner Astr. Jahrbuch für 1837*, l'Encke diede alcune formule, che sono comodissime per calcolare molti valori successivi degli integrali di una funzione data mediante i suoi valori corrispondenti ad  $x=0, 1, 2, \dots$ . Spero che a qualche lettore piaccia di trovare qui esposte brevemente tali formule, alle quali aggiungo quelle che danno i valori delle derivate, che in alcune occasioni possono occorrere non meno degli integrali.

Supponiamo che si conoscano tutte le differenze apparenti dal seguente prospetto

$V\Sigma^3$	$V\Sigma^2$	$\Sigma$	$V^0=y_0$	$V^{n-1}\Delta$	$V^{n-2}\Delta^2$	$V^{n-3}\Delta^3$	$V^{n-4}\Delta^4$	$V^{n-5}\Delta^5$
$V^1\Sigma^3$	$V^2\Sigma^2$	$V\Sigma$	$V^1=y_1$	$\Delta$	$\Delta^2$	$V^{n-1}\Delta^3$	$V^{n-2}\Delta^4$	$V^{n-3}\Delta^5$
$V^2\Sigma^3$	$V^3\Sigma^2$	$V^2\Sigma$	$V^2=y_2$	$V\Delta$	$V\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$	$V^{n-1}\Delta^5$
$V^3\Sigma^3$	$V^4\Sigma^2$	$V^3\Sigma$	$V^3=y_3$	$V^2\Delta$	$V^2\Delta^2$	$V\Delta^3$	$V\Delta^4$	$\Delta^5$

perlochè converrà calcolare altri valori della  $\gamma$  prima e dopo dei due confini  $\gamma_0, \gamma_n$ , il che è quanto io volli evitare nella precedente memoria. Del resto anche colla sola conoscenza dei  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ , se supporremo che le  $\Delta^n$  sieno costanti potremo estendere la tavola come nel precedente prospetto, e come è richiesto dalle formole dell'Encke.

Il valore della prima derivata  $d$ , che simbolicamente è espresso da  $d = \log(1 + \Delta)$ , viene dato da una serie molto semplice, quando si segui con  $M$  il medio aritmetico tra un valore ed il suo variato successivo, cioè si

ponga  $MV^i = \frac{1}{2} (V^i + V^{i+1})$ ; questa serie è

$$(I) \quad \alpha d = M \left( V^{-1}\Delta - \frac{1}{6} V^{-3}\Delta^3 + \frac{1}{50} V^{-5}\Delta^5 - \frac{1}{140} V^{-7}\Delta^7 \right. \\ \left. + \frac{1}{650} V^{-9}\Delta^9 - \frac{1}{2772} V^{-11}\Delta^{11} + \text{ec.} \right).$$

Si vede che la formula contiene le sole differenze prima, terza, quinta, ec., e che i termini  $V^{-1}\Delta, \Delta, V^{-3}\Delta^3, V^{-5}\Delta^5, V^{-7}\Delta^7, V^{-9}\Delta^9, \text{ec.}$ , dei quali deggiono calcolarsi le medie aritmetiche, sono nella precedente tavola in due righe orizzontali l'una sopra, l'altra sotto, del termine  $\gamma_0$ , cui appartiene la derivata che vuol calcolarsi, e che è segnata con  $d$ . Vi si è aggiunto il coefficiente  $\alpha$  pel caso che i valori della  $x$ , cui corrispondono  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$  sieno  $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots$ .

Per la derivata seconda non occorre alcun medio e si ha

$$(I) \quad \alpha^2 d^2 = V^{-1}\Delta^2 - \frac{1}{12} V^{-3}\Delta^4 + \frac{1}{90} V^{-5}\Delta^6 - \frac{1}{560} V^{-7}\Delta^8 \\ + \frac{1}{5150} V^{-9}\Delta^{10} - \frac{1}{16652} V^{-11}\Delta^{12} + \text{ec.}$$

i cui termini sono sulla riga orizzontale corrispondente ad  $\gamma_0$ .

Similmente

$$(I) \quad \alpha^3 d^3 = M \left( V^{-1}\Delta^3 - \frac{1}{4} V^{-3}\Delta^5 + \frac{7}{120} V^{-5}\Delta^7 - \frac{41}{5024} V^{-7}\Delta^9 \right. \\ \left. + \frac{479}{451200} V^{-9}\Delta^{11} - \text{ec.} \right) \\ \alpha^4 d^4 = V^{-1}\Delta^4 - \frac{1}{6} V^{-3}\Delta^6 + \frac{7}{240} V^{-5}\Delta^8 - \frac{41}{7560} V^{-7}\Delta^{10} \\ + \frac{479}{453600} V^{-9}\Delta^{12} - \text{ec.}$$

Che se si vogliano i valori corrispondenti ad  $x = \frac{\alpha}{2}$ , (anzichè ad  $x=0$ ), valori che noi segneremo con  $V^{\frac{1}{2}}$ , serviranno le serie

$$\begin{aligned}
 V^{\frac{1}{2}} &= M \left( V^0 - \frac{4}{8} V^{-1}\Delta^2 + \frac{5}{428} V^{-1}\Delta^4 - \frac{5}{4024} V^{-1}\Delta^6 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{55}{32768} V^{-1}\Delta^8 - \text{ec.} \right) \\
 (II) \quad \alpha V^{\frac{1}{2}} d &= \Delta - \frac{4}{24} V^{-1}\Delta^1 + \frac{5}{640} V^{-1}\Delta^3 - \frac{5}{7168} V^{-1}\Delta^5 \\
 &\quad + \frac{55}{294912} V^{-1}\Delta^7 - \text{ec.} \\
 \alpha^2 V^{\frac{1}{2}} d^2 &= M \left( V^{-1}\Delta^2 - \frac{5}{24} V^{-1}\Delta^4 + \frac{7.57}{428.45} V^{-1}\Delta^6 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{5229}{4024.45.7} V^{-1}\Delta^8 + \text{ec.} \right) \\
 \alpha^3 V^{\frac{1}{2}} d^3 &= V^{-1}\Delta^3 - \frac{4}{8} V^{-1}\Delta^5 + \frac{37}{1920} V^{-1}\Delta^7 - \frac{5229}{1024.153.7} V^{-1}\Delta^9 \\
 &\quad + \frac{59.181}{52768.21.25} V^{-1}\Delta^{11} - \text{ec.}
 \end{aligned}$$

Per calcolare gl' integrali presi tutti da  $x=0$  bisognerà da prima determinare le sommatorie  $\Sigma$ ,  $\Sigma^2$ , ec. col mezzo delle formule

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\alpha} \int &= M \left( \Sigma - \frac{4}{12} V^{-1}\Delta + \frac{41}{720} V^{-1}\Delta^3 - \frac{491}{60480} V^{-1}\Delta^5 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2497}{5628800} V^{-1}\Delta^7 - \text{ec.} \right) \\
 (III) \quad \frac{1}{\alpha^2} \int^2 &= V\Sigma^2 + \frac{4}{4.5} V^0 - \frac{4}{46.15} V^{-1}\Delta^2 + \frac{51}{64.27.35} V^{-1}\Delta^4 \\
 &\quad - \frac{289}{256.81.475} V^{-1}\Delta^6 + \frac{317}{1024.81.275} V^{-1}\Delta^8 - \text{ec.} \\
 \frac{4}{\alpha^3} \int^3 &= M \left( V\Sigma^3 + \frac{4}{240} V^{-1}\Delta - \frac{51}{50240} V^{-1}\Delta^3 + \frac{289}{4209600} V^{-1}\Delta^5 - \text{ec.} \right) \\
 \frac{4}{\alpha^4} \int^4 &= V^2\Sigma^4 + \frac{4}{6} V^{-1}\Sigma^2 - \frac{4}{720} V^0 + \frac{4}{5024} V^{-1}\Delta^2 - \frac{41}{725760} V^{-1}\Delta^4 \\
 &\quad + \frac{491}{512.245.585} V^{-1}\Delta^6 - \text{ec.}
 \end{aligned}$$

ponendone i primi membri eguali a zero: così la seconda darà

$$V\Sigma^1 = -\frac{1}{12}V^0 + \frac{1}{240}V^{-1}\Delta^1 - \frac{51}{60480}V^{-2}\Delta^1 + \text{ec.} :$$

la prima non dà  $\Sigma$ , bensì  $M\Sigma = \frac{1}{2}(\Sigma + V\Sigma)$ , ma sapendosi che  $V\Sigma = \Sigma + \gamma_0$ , se ne dedurrà tosto il valore di  $\Sigma = -\frac{1}{2}V^0 + M(\frac{1}{12}V^{-1}\Delta - \text{ec.})$ , il quale sostituito nella terza darà  $MV\Sigma^1 = \frac{1}{2}(V\Sigma^1 + V^1\Sigma^1) = V\Sigma^1 + \frac{1}{2}V\Sigma^1 = M(-\frac{1}{240}V^{-1}\Delta + \text{ec.})$ . Coi trovati valori di  $\Sigma$ ,  $V\Sigma^1$ ,  $V\Sigma^1$ ,  $V^1\Sigma^1$ , ec. si calcoleranno mediante successive sommazioni quante occorrano delle prime colonne della precedente tabella; dopo di che le medesime serie (III) - ci daranno i valori degl' integrali estesi da  $x=0$  fino ad  $x=n\alpha$ , bastando a tal uopo di aggiungere a ciascun termine il fattore  $V^n$ . Così, per esempio, l' integrale secondo, che si annulla insieme col suo differenziale quando  $x=0$ , esteso fino ad  $x=2\alpha$  avrà il valore  $V^2\int$  dato dalla

$$\frac{1}{\alpha^2}V^2\int = V^1\Sigma^1 + \frac{1}{12}V^1 - \frac{1}{240}V\Delta^1 + \frac{51}{60480}V^{-2}\Delta^1 - \text{ec.}$$

Si ponga mente che ogni formula contiene i termini che nella tabella sono posti su righe orizzontali.

Con eguale facilità possono calcolarsi i predetti integrali da  $x=0$  fino ad  $x=(n+\frac{1}{2})\alpha$ , servendo a ciò le serie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha}V^1\int &= V\Sigma + \frac{1}{24}\Delta - \frac{17}{5760}V^{-1}\Delta^1 + \frac{567}{967680}V^{-2}\Delta^1 \\ &\quad - \frac{43.2143}{464486400}V^{-3}\Delta^1 - \text{ec.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(IV)} \quad \frac{1}{\alpha^2}V^1\int^1 &= M(V\Sigma^1 - \frac{1}{24}V^0 + \frac{17}{1920}V^{-1}\Delta^1 - \frac{567}{193356}V^{-2}\Delta^1 + \text{ec.}) \\ \frac{1}{\alpha^2}V^1\int^2 &= V^1\Sigma^1 + \frac{1}{8}V\Sigma - \frac{7}{1920}\Delta + \frac{437}{967680}V^{-1}\Delta^1 - \text{ec.} \end{aligned}$$

aggiungendo a ciascun termine il fattore  $V^n$ . Così l' integrale primo esteso da  $x=0$  ad  $x=\frac{5}{2}\alpha$  è dato da

$$\frac{1}{\alpha}V^2\int = V^1\Sigma + \frac{1}{24}V\Delta - \frac{17}{5760}V\Delta^1 - \text{ec.}$$

Che se tutti gl' integrali si vogliono prendere da  $x=\frac{1}{2}\alpha$ , bisognerà

rololare le  $\Sigma$ ,  $V\Sigma'$ , ec. non più mediante le (III), bensì col mezzo delle (IV) ponendone i primi membri eguali a zero. Dopo ciò le stesse (IV) aggiuntovi il fattore  $V^n$  daranno gl' integrali da

$x = \frac{1}{2}a$  ad  $x = (n + \frac{1}{2})a$ : e similmente le (III) daranno gl' integrali da  $x = \frac{1}{2}a$ , ad  $x = na$ .

Applichiamo le precedenti formole all' esempio del § 6; e per non calcolare alcun altro valore della funzione  $y = \frac{1}{x+1}$  fuori dei due limiti  $x=0$ ,  $x=1$ , supponiamo che le differenze quinte sieno costanti, e compiamo in tal modo la seguente tabella

$\Sigma'$	$\Sigma$	$y$	$\Delta$	$\Delta'$	$\Delta''$	$\Delta'''$	$\Delta''''$
	-0,5165496		-2440481		-456539		
-0,0850490	0,4854304	1,0000000	-1666067	775814	-297625	158736	
0,4004314	1,5167837	0,8533355	-4190470	476191	-178572	419031	
1,7172131	2,0510694	0,7142857	-892857	297619	-99206	79560	-39685
5,7482845	2,6560694	0,625	-694144	198415	-59525	39681	
6,4043559	3,2116250	0,5555556	-533556	158888	-59529		4
9,6159789	5,7116250	0,5	-476197	79559	-99218	-59689	

La prima delle (I) ci dà per la derivata di  $y$  corrispondente ad  $x=0$   $d=-0,996032$ , che è lo stesso valore che si otterrebbe dalla formula  $ad = \log(1+\Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \text{ec.}$

La seconda delle (I) dà  $d'=1,901465$  invece del valore esatto  $d'=2$ . Per la stessa seconda derivata corrispondente ad  $x=1$ , cioè ad  $n=5$  si troverebbe  $V^5d'=0,20666$  invece di 0,25.

$$\begin{aligned}
 MV^{-1}\Delta &= -0,2053574 \\
 -\frac{1}{6}MV^{-1}\Delta' &= + 62832 \\
 \frac{1}{50}MV^{-1}\Delta'' &= - 1323 \\
 \text{ad} &= -0,1992065 \\
 V^{-1}\Delta'' &= 0,0773815 \\
 -\frac{1}{12}V^{-1}\Delta''' &= - 13228 \\
 \Delta^4d' &= 0,0760586 \\
 V^4\Delta^5 &= 79359 \\
 -\frac{1}{12}V^5\Delta^6 &= + 3307 \\
 \Delta^4V^5d' &= 82666
 \end{aligned}$$

La prima delle (II) dà  $V^1 = 0,90948$ ,  
 come si sarebbe egualmente ottenuto  
 dalla  $V^1 = (1 + \Delta)^{\frac{1}{2}} = \Delta^0 + \frac{1}{2} \Delta$   
 $-\frac{1}{8} \Delta^2 + \text{cc.}$  Il valore esatto è  $\frac{10}{11}$ .

Perchè gl' integrali comincino da  
 $x = 0$  porremo lo zero in luogo dei  
 primi membri delle (III) ed avremo  $\Sigma =$   
 $-0,5465496$ ,  $V\Sigma^1 = -0,0830490$ ,

che pienamente si accordano coi valori  
 trovati ai §§ 9, 13 mediante le (7) (10). Dopo ciò gl' integrali estesi da  
 $x = 0$  fino ad  $x = 5\alpha = 1$  saranno  $V\int = 0,6934630$ ,  $V^1\int = 0,3863044$ .  
 L' integrale esteso da  $x = 0$  ad  
 $x = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{10}$  è dato dalla prima delle

(IV)  $V^1\int = 0,095348$ , coll' errore di  
 $+ 0,000008$ .

$$\begin{array}{rcl}
 MV^0 & = & 0,9166667 \\
 -\frac{1}{8} MV^{-1} \Delta^1 & = & 78125 \\
 \frac{5}{428} MV^{-2} \Delta^1 & = & 3255 \\
 \hline
 V^1 & = & 0,9091797 \\
 \hline
 -\frac{1}{2} V^0 & = & 0,5 \\
 \frac{1}{12} MV^{-1} \Delta & = & 0174134 \\
 -\frac{11}{720} MV^{-2} \Delta^1 & = & 5760 \\
 & & 125 \\
 \hline
 \Sigma & = & -0,5465496 \\
 V\int & = & 0,6934630 \\
 V^1\int & = & 0,3863044 \\
 V\Sigma & = & +0,4834504 \\
 \frac{1}{24} \Delta & = & 69444 \\
 -\frac{17}{5760} V^{-1} \Delta^1 & = & 878 \\
 & & 16 \\
 \hline
 \frac{1}{\alpha} V^1 \int & = & 0,4765922
 \end{array}$$

I coefficienti delle predette serie possono, seguendo l' Encke, facilmente  
 calcolarsi nel seguente modo. Suppongasi che sia  $y = e^{ax}$ , e che  $x$  prenda  
 successivamente i valori 0, 1, 2, 3, cc. sarà

$$V = e^x, \Delta = e^x - 1, d = \alpha, \int = \frac{1}{\alpha} \cdot M = \frac{V^0 + V^1}{2} = \frac{1}{2} (1 + e^x)$$

e ad ogni moltiplicazione simbolica tra i primi membri corrisponderà una moltiplicazione effettiva tra i secondi membri; pongasi pure, per brevità,

$$\delta^1 = V^{-1} \Delta = e^{-x} (e^x - 1)^1$$

Nella teoria già esposta da V. Riccati, e della quale ora finalmente si apprezzano i vantaggi (1), sarà

$$MV^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}}) \quad \text{il coseno iperbolico, e}$$

$$\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}) \quad \text{il seno iperbolico di } \frac{\alpha}{2};$$

perciò  $\alpha$  sviluppato secondo le potenze di  $\delta$  darà

$$\alpha = 2 \operatorname{Asnh} \frac{\delta}{2} = \delta - \frac{\delta^3}{5.8} + \frac{5}{4} \cdot \frac{\delta^5}{5.52} - \frac{5.5}{4.6} \cdot \frac{\delta^7}{7.128} + \text{ec.}$$

È egualmente semplice, ma forse meno conosciuto, lo sviluppo di  $\alpha^2$  che è

$$\alpha^2 = \delta^2 - \frac{\delta^4}{2.2.5} + \frac{2\delta^6}{5.5.4.5} - \frac{2.3\delta^8}{4.4.5.6.7} + \frac{2.5.4\delta^{10}}{5.5.6.7.8.9} - \text{ec.}$$

Le varie potenze dello sviluppo di  $\alpha$ , e la formula

$$D\alpha = \frac{1}{\operatorname{csh} \frac{\alpha}{2}} = \frac{2e^{\frac{\alpha}{2}}}{e^{\alpha} + 1} = \frac{v^{\frac{1}{2}}}{M} = \frac{\Delta}{M\delta}$$

(1) Se l'AMBA, sia un semicircolo col centro C, AKL ne sia la tangente nel punto A, il raggio qualunque CM si prolunghi fino ad incontrare quella tangente in L, e si tirino perpendicolari alla medesima tangente la MK, e la indefinita LM', la quale sia tagliata in M' dalla prolungazione della CK; tutti i punti M' così determinati costituiranno un'iperbola equilatera AM' omologa del circolo AM (mia Geometria descrittiva, § 108). Ora se il raggio CA prendasi per unità di lunghezza, e dai punti M, M' si abbassino su di esso le perpendicolari MP, MP' è noto che PM=AK, CP, ed AL sono il seno, il coseno e la tangente dell'arco AM, o, quel che è lo stesso, del doppio del settore circolare CAM. Analogamente a ciò P'M'=AL, CP' ed AK sono il seno, il coseno e la tangente iperbolici del doppio del settore iperbolico CAM'.

Chiamati  $A, \alpha$  questi doppi settori circolare ed iperbolico si ha  $\operatorname{sen} A = \operatorname{tgh} \alpha$ ,  $\operatorname{tg} A = \operatorname{senh} \alpha$ ,  $\operatorname{cos} A = \operatorname{csh} \alpha = 1$ , e facilmente si trova  $\operatorname{senh} \alpha = \frac{1}{2}(e^{\alpha} - e^{-\alpha})$ ,  $\operatorname{csh} \alpha = \frac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha})$ , ec. La relazione tra  $A$  ed  $\alpha$  può esprimersi con

$$\alpha = \operatorname{dig} A = A + \frac{1}{8} A^3 + \frac{1}{36} A^5 + \text{ec.}$$

$$A = \operatorname{ampl} \alpha = \alpha - \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{6} \alpha^3 - \text{ec.}$$

giacchè nella teoria della prima trascendente ellittica quando il modulo è eguale all'unità,  $\alpha$  è il digamma dell'amplitude  $A$ .

che si deduce dalla  $\delta = 2 \sinh \frac{\alpha}{2}$  prendendone la derivata rispetto a  $\delta$ , danno con molta facilità tutte le formule che vogliamo dimostrare.

Così la seconda delle (I) è subito data da

$$d^1 = \alpha^1 = \delta^1 - \frac{1}{12} \delta^3 + \text{ec.} = V^{-1} \Delta^1 - \frac{1}{12} V^{-3} \Delta^1 + \text{ec.}$$

La terza  $d^3 = \alpha^3 = \delta^3 - \frac{1}{8} \delta^5 + \text{ec.}$  conterrebbe le potenze dispari di  $\delta$ ; ma aggiungendo al secondo membro il fattore

$$\frac{M\delta}{\Delta} D\alpha = 1$$

$$\begin{aligned} \text{si ha} \quad d^3 &= M \frac{\delta}{\Delta} \alpha^1 D\alpha = \frac{1}{4} M \frac{\delta}{\Delta} D(\alpha^1) = M \frac{\delta}{\Delta} \left( \delta^1 - \frac{\delta^3}{4} + \text{ec.} \right) \\ &= M \left( V^{-1} \Delta^1 - \frac{1}{4} V^{-3} \Delta^3 + \text{ec.} \right) \end{aligned}$$

cioè basta prendere la derivata rispetto a  $\delta$  della  $\alpha^1 = \delta^1 - \frac{1}{6} \delta^3 + \text{ec.}$

La prima delle (IV) è data da

$$V^{\frac{1}{2}} f = V^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\alpha} = V^{\frac{1}{2}} \left( \delta^{-1} + \frac{1}{24} \delta - \text{ec.} \right) = V \Sigma + \frac{1}{24} \Delta - \text{ec.}$$

La seconda delle (IV) è

$$V^{\frac{1}{2}} f' = V^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\alpha^2} = M \frac{D\alpha}{\alpha^2} = -M D \left( \frac{1}{\alpha} \right)$$

e quindi si ottiene prendendo la derivata rispetto a  $\delta$  della precedente. La

prima delle (III)  $\int = M \frac{\delta}{\Delta} \frac{D\alpha}{\alpha}$  richiede che si calcoli il prodotto delle due serie

$$\frac{1}{\alpha} = \delta^{-1} + \frac{1}{24} \delta - \text{ec.}, \quad D\alpha = 1 - \frac{1}{8} \delta^3 + \frac{5}{128} \delta^5 - \text{ec. ec.}$$

Il prof. Fedele Amante pubblicò fino dal 1843 (Napoli) una tavola per l'interpolazione che si fonda sulla formula, che è media aritmetica tra le due seguenti

$$(A) \quad v' = v'' + t \left\{ \Delta + \frac{t-1}{2} \left[ v^{-1} \Delta^1 + \frac{t+1}{5} \left( v^{-1} \Delta^1 + \frac{t-2}{4} [v^{-3} \Delta^3 + \frac{t+2}{5} v^{-5} \Delta^5 + \text{ec.}] \right) \right] \right\}$$



$$(B) \quad v' = v'' + t \left\{ \Delta + \frac{t-1}{2} \left[ \Delta' + \frac{t-2}{3} \left( v^{-1} \Delta' + \frac{t+1}{4} |v^{-1} \Delta' + \frac{t-3}{5} v^{-2} \Delta' + \text{ec.} \right) \right] \right\};$$

ed egli mostra come per  $0 < t < 1$  essa sia più comoda di ciascuna delle (A) (B).

Moltiplicando una di queste formule per le (III) e per  $V''$  si ottengono le serie che danno gl' integrali fino al limite  $(n+t)x$  essendo  $t$  frazionario. Così pel secondo integrale basterà moltiplicare la (A) per la seconda delle (III), e si otterrà

$$\frac{1}{x^2} V' \int = V \Sigma + t V \Sigma + \frac{6t^2 - 6t + 1}{12} V'' + \frac{2t^2 - t}{12} \Delta + \frac{t^2 - 2t^2 + t^2 - 0,1}{24} V^{-1} \Delta' + \text{ec.}$$

Pel primo integrale possiamo dare alla prima delle (III) le due forme

$$\frac{1}{x} \int = \Sigma + \frac{1}{2} V'' - \frac{1}{12} V^{-1} \Delta - \frac{1}{24} V^{-1} \Delta' + \text{ec.} = V \Sigma - \frac{1}{2} V'' - \frac{1}{12} \Delta + \frac{1}{24} V^{-1} \Delta' + \text{ec.}$$

e moltiplicandole rispettivamente per le due parti della (A) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} V' \int &= V \Sigma + \frac{2t-1}{2} V'' + \frac{6t^2-1}{12} \Delta + \frac{4t^2-6t+1}{24} V^{-1} \Delta' \\ &+ \left( \frac{t^2-2t^2}{24} + \frac{11}{720} \right) V^{-1} \Delta' + \text{ec.} \end{aligned}$$

727 110 112

(Letta nei giorni 25 gennaio e 14 marzo 1855).

953 - 1

Σ





